§7.2 内积的表示与标准正交基

$$F\text{-线性空间 } V \xrightarrow[1:1]{\text{基}(\alpha_1\cdots\alpha_n)} F^n \qquad \alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$V\text{上的}F\text{-线性变换} \xrightarrow[1:1]{\text{基}(\alpha_1\cdots\alpha_n)} F^{n\times n} \qquad \mathscr{A}(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$$

$V=\mathbb{R}$-线性空间. $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 为 V 上的一组基.

$$V\text{上的内积} \xrightarrow[1:1]{\text{基 }\alpha_1\cdots\alpha_n} \mathbb{R}\text{上 }n\text{阶正定矩阵}$$

$$(\,,\,) \longmapsto G=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$$

↳ 基 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 下的度量矩阵.

性质: G 为实对称矩阵,满足 $x^TGx\geq 0$, 且 "=" $\Leftrightarrow x=0$.

称满足如上性质的实对称方阵为正定矩阵. 因此内积的度量矩阵为正定矩阵. 反之, $\forall$ 正定矩阵 G, 则

$$(\alpha,\beta):=x^TGy$$

给出 V 上的一个内积.

问题 1) 不同基下度量矩阵之间的关系

2) 度量矩阵的最简形式

V= 欧氏空间. 两组基 $(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)P$ 可逆

$$\begin{rcases} \alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) x = (\eta_1 \cdots \eta_n) \bar{x} \\ \beta = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) y = (\eta_1 \cdots \eta_n) \bar{y} \end{rcases} \Rightarrow \begin{cases} x = P\bar{x} \\ y = P\bar{y} \end{cases}$$

设 $(\,,\,)$ 在 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 和 $\eta_1 \cdots \eta_n$ 下的度量矩阵为 G 和 $\bar{G}$，则

$$\left.\begin{cases} (\alpha,\beta) = x^T G y = \bar{x}^T P^T G P \bar{y} \\ (\alpha,\beta) = \bar{x}^T \bar{G} \bar{y} \end{cases}\right\} \Rightarrow \bar{G} = P^T G P$$

$$(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \underset{\substack{\| \\ P}}{(t_{ij})_{n\times n}} \Rightarrow \beta_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj} \alpha_k$$

$$(\beta_i, \beta_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} t_{ki} \alpha_k, \sum_{l=1}^{n} t_{lj} \alpha_l\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} t_{ki} (\alpha_k, \alpha_l) t_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (P^T)_{ik} \cdot (G)_{kl} \cdot (P)_{lj} = (P^T G P)_{ij}$$

$$\Rightarrow \bar{G} = P^T G P.$$

定义：两矩阵 G, $\bar{G}$ 称为相合，若存在可逆阵 P 使得

$$\bar{G} = P^T G P.$$

性质：1) 内积在不同基下的度量矩阵相合。

2) 相合为等价关系。

实对称方阵的相合分类，以及相合标准形（第八章）

② 度量矩阵的最简形式？为了回答这一问题，我们需要引入标准正交基。

定义：$V=n$维欧氏空间. 称由一组两两正交的非零向量为**正交向量组**，称由正交向量组构成的基为**正交基**；称由单位向量组成的正交基为**标准正交基**

例：(1) $\mathbb{R}^n$, $\left((x_1,\cdots,x_n)^T,(y_1,\cdots,y_n)^T\right) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$. 则 $e_1,\cdots,e_n$ 为标准正交基.

(2) $\mathbb{R}^n$, $\left((x_1,\cdots x_n)^T,(y_1\cdots y_n)^T\right) := \sum_{i=1}^n i x_i y_i$ 则 $e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \cdots \frac{e_n}{\sqrt{n}}$ 为标准正交基.

性质：正交向量组线性无关.

证：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为正交向量组，则

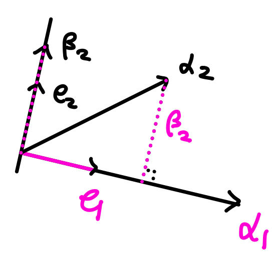
$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}|\alpha_i|^2\neq 0 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

若 $\mu_1\alpha_1+\cdots\mu_r\alpha_r=0$，则

$$0=(\alpha_i,\mu_1\alpha_1+\cdots+\mu_r\alpha_r)=\sum_{j=1}^r \mu_j(\alpha_i,\alpha_j)=\mu_i|\alpha_i|^2$$

$\Rightarrow \mu_i=0 \Rightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

定理（Schmidt 正交化）：从欧氏空间的任意一组基出发，可以构造一组标准正交基.



证：设 $V=\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$.

$e_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}$

找一个 $\langle e_1, \alpha_2 \rangle$ 中与 e_1 垂直的向量 $\beta = \alpha_2 - \lambda_1 e_1$. $e_1 \perp \beta \Rightarrow \lambda_1 = (\alpha_2, e_1)$. 即

$$\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, e_1) e_1 \neq 0 \quad \Rightarrow e_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}$$

找一个 $\langle e_1, e_2, \alpha_3 \rangle$ 中与 e_1, e_2 垂直的向量 $\beta = \alpha_3 - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2$, 则

$$\beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, e_1) e_1 - (\alpha_2, e_2) e_2 \neq 0 \quad \Rightarrow e_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|}$$

$\vdots$

找一个 $\langle e_1, e_2, \cdots, e_{k-1}, \alpha_k \rangle$ 中与 $e_1, \cdots, e_{k-1}$ 垂直的向量 β

$$\beta_k = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_k, e_i) e_i$$

显然 $\beta_k \neq 0 \ (\forall k)$ 否则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 线性相关.

$$\Rightarrow e_k = \frac{\beta_k}{|\beta_k|}$$

$\vdots$

直到 $k=n$, 就得到一组标准正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, 满足

$$\langle e_1, \cdots, e_k \rangle = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_k \rangle \quad \forall\ 1 \leq k \leq n. \qquad \square$$

例: 标准正交化:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, e_1) e_1 = \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, e_1) e_1 - (\alpha_3, e_2) e_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \beta_4 = \alpha_4 - \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i, e_i) e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$